Établissement : Année
Université des Lagunes 2020-2021

TRAVAUX DIRIGES
L1 Analyse 2
FICHE 3

EXERCICE 1

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a;\, b]$ à valeur réelle.

1. Montrer que si $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors il existe $c \in [a;\, b]$ tel que $f(c) = 0$
2. Montrer qe si f est positive sur $[a;\, b]$ et $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a;\, b]$
3. Montrer
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)dx| \iff f \text{ est de signe constant sur } \mathbb{R}$$
4. Supposons que $a = 0$ et $b = 1$
Montrer
$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \implies \exists\, c \in]0;\, 1[\text{ tel que } f(c) = c$$

EXERCICE 2

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 4}}$$

1. Montrer que F est une fonction impaire.
2. Montrer que F est dérivable puis calculer $F'(x)$ pour tout réel x et déterminer le signe de F'.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a :
$$0 \leq F(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 4}}$$
.
4. Déduire de ce qui précède que F est bornée sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3

Intégrer les équations differentielles suivantes :

1. $(x^2 + 1)y' - 2y = -2\sqrt{y}$
2. $y' = -xy^2 + \frac{1}{x}y - \frac{2}{x^3}$
3. $y'' - 4y' + 3y = x^2e^x + xe^{2x}\cos x$
4. $y'' - 4y' + 4y = e^t + (3t - 1)e^{2t} + t - 2$
5. $x^2y'' - 3xy' + y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+$. Poser $t = \ln x$
6. $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$